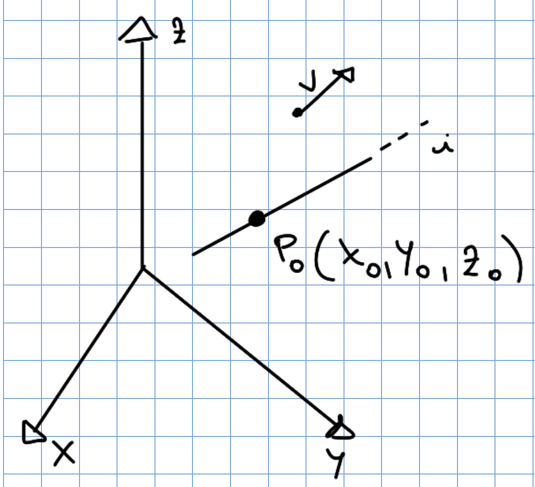
Rette

Servono un punto e la direzione per definire una retta



r retta passante per P_0 e avente la direzione di $v \in V_O$

$V = V_x i + V_y J + V_z K$

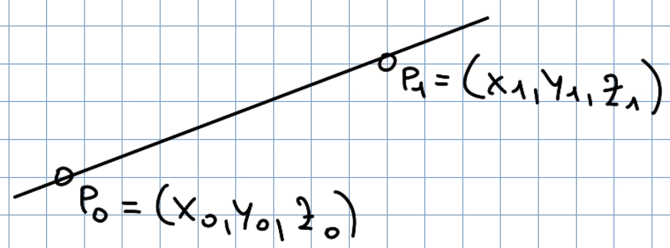
$P = (x, y, z) \in r \iff \overrightarrow{P_0 P}$ è parallelo a $V \iff$ esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{P_0 P} = t \cdot v$

Esiste $t \in \mathbb{R}$ t.c.

$$(x - x_0) i + (y - y_0) J + (z - z_0) K = t \cdot (V_x i + V_y J + V_z K)$$

$$\iff \begin{cases} x - x_0 = t \cdot V_x \\ y - y_0 = t \cdot V_y \\ z - z_0 = t \cdot V_z \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = x_0 + t \cdot V_x \\ y = y_0 + t \cdot V_y \\ z = z_0 + t \cdot V_z \end{cases}$$

Eq parametriche di r



Direzione $V = \overrightarrow{P_0 P_1}$

$P_0 = (\overset{x_0}{1}, \overset{y_0}{2}, \overset{z_0}{3}) \quad P_1 = (3, 4, 5)$

$\overrightarrow{P_0 P_1} = \overset{V_x}{(3-1)} i + \overset{V_y}{(4-2)} J + \overset{V_z}{(5-3)} K = 2i + 2J + 2K$

$x_0 + V_x \cdot t$

retta passante per P_0 e P_1

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-1}{2} \\ t = \frac{y-2}{2} \\ t = \frac{z-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} \\ \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \rightarrow \text{questo è un piano } \pi_1 \\ y - z + 1 = 0 \rightarrow \quad // \quad \pi_2 \end{cases}$$

$r = \pi_1 \cap \pi_2$

$P_0 = (1,2,3) \qquad P_1 = (1,3,4)$

$\vec{P_0P_1} = (1-1)i + (3-2)j + (4-3)k = j + k$

$$\begin{cases} x = 1 + 0 \cdot t \\ y = 2 + 1 \cdot t \\ z = 3 + 1 \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ t = y - 2 \\ t = z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$P_0 = (1, 2, 3) \qquad P_1 = (1, 2, 5)$

Retta per P_0 e P_1

$\vec{P_0P_1} = (1-1)i + (2-2)j + (5-3)k = 2k$

$$\begin{cases} x = 1 + 0 \cdot t \\ y = 2 + 0 \cdot t \\ z = 3 + 2 \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

π_1 e π_2 non sono paralleli $\Rightarrow n_{\pi_1}$ e n_{π_2} non sono paralleli

$n_{\pi_1} = a_1 i + b_1 j + c_1 k \qquad n_{\pi_2} = a_2 i + b_2 j + c_2 k$

Queste diventa

$$\begin{cases} \pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 = rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{pmatrix}$$

questo sistemi hanno come soluzione $\infty^{3-2} = \infty^1$

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3 = 2 \end{cases}$$ trovare le eq. parametriche di r

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$= \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 - 2z + z = 1 \\ y = 1 - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 1 - 2z \end{cases}$$

Poniamo $z = t$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2z \\ z = t \end{cases} \qquad V_r = i - 2j + k$$

Per ottenere un punto della retta sostituiamo $t = n$ dove n è un numero e caso

Come trovare la soluzioni senza fare il sistema

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 & \pi_1 \\ x + 2y + 3z = 2 & \pi_2 \end{cases}$$

$$r = \pi_1 \cap \pi_2$$

Per trovare la soluzione basta fare il prodotto vettoriale tra i vettori associati ai piani

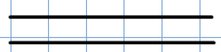
$\to V = V_x i + V_y j + V_z k$

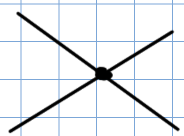
$$V_r = (i + j + k) \wedge (i + 2j + 3k) =$$

base standard

$$\det \begin{pmatrix} \boxed{i \quad j \quad k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot i - 2 \cdot j + 1 \cdot k$$

2 rette nel piano possono essere

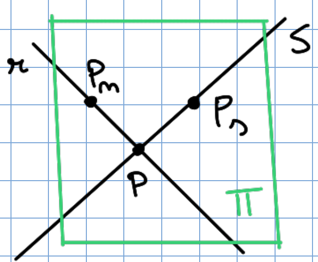
Parallele  nessun punto di intersezione

Incidenti  un singolo punto di intersezione

2 rette nello spazio 3D possono essere

COMPLANARI $\to$ incidenti / $\to$ parallele

SGHEMBE non possono essere intersezioni



$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 2-2t \\ z = 3-4t \end{cases}$$

vettore direzione di r

$\boxed{V_r} = i + j + 2k \qquad V_s = -2i - 2j - 4k$

essendo che $V_s = (-2) \cdot V_r$ allora r e s sono 2 parallele

---

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4-t \\ z = 3+2t \end{cases}$$

$V_r = i + j + 2k \qquad V_s = i - j + 2k$

$$rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

r e s non sono parallele

r = s

$$\begin{cases} 1+t = 1+t' \\ 2+t = 4-t' \\ 3+2t = 3+2t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t-t' = 0 \\ t+t' = 2 \\ 2t-2t' = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 \end{cases}$$

avendo dei risultati so che le 2 rette hanno un punto in comune

sostituisco t e t' nelle eq di r e s

$r \cap s = \{(2, 3, 5)\}$

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 2+2t \end{cases}$$

$V_r = 1 + j + 2k \qquad V_s = i - j + 2k$

r e s non sono parallele perchè V_r e V_s non sono paralleli

$$\begin{cases} 1+t = 1+t' \\ 2+t = 2-t' \\ 3+2t = 2+2t' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t-t' = 0 \\ t+t' = 0 \\ 2t-2t' = -1 \end{cases} \rightarrow \frac{2(t-t') = -1}{r \cap s = \emptyset}$$

r e s sono sghembe

Fasci di piani

$\pi: ax+by+cz+d=0$

$\pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

π e π' non paralleli

il fascio di piani determinato da π e π' $(f(\pi,\pi'))$ è l'insieme dei piani d'equazione

$$\lambda(ax+by+(z+d))+\mu(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

con $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$\pi \in f(\pi,\pi')$ con $(\lambda \neq 0, \mu \neq 0)$

$\pi' \in f(\pi,\pi')$ con $(\lambda \neq 0, \mu \neq 0)$

Asse di $f(\pi,\pi')$: $r = \pi \cap \pi'$

oss: Sia P_0 un punto t.c. $P_0 \notin r$ allora esiste uno e un sol piano di $f(\pi,\pi')$ che passa per P_0

$$P_0 = (x_0,y_0,z_0) \notin r \begin{cases} \rightarrow ax_0+by_0+cz_0+d \neq 0 \quad (1) \\ \quad \text{oppure} \\ \rightarrow a'x_0+b'y_0+c'z_0+d \neq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Supponiamo la (1)

$$\lambda(ax_0+by_0+(z_0+d))+\mu(a'x_0+b'y_0+c'z_0+d')=0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{a'x_0+b'y_0+c'z_0+d'}{ax_0+by_0+cz_0+d} \cdot \mu$$

teorema Siano π e π' piani non paralleli: il fascio di piani $\mathcal{F}$ determinato da π e π' coincide con l'insieme S dei piani che contengono l'asse $r = \pi \cap \pi'$

Dimostrazione

$\mathcal{F} \subseteq S$: Sia $\alpha \in \mathcal{F} \Rightarrow$ esistono $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli tali che α ha equazione

$$\lambda_0(ax+by+cz+d) + \mu_0(a'x+b'y+c'z+d') = 0$$

Sia $P_0 \in r$: $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_0\underbrace{(ax_0+by_0+cz_0+d)}_{0} + \mu_0\underbrace{(a'x_0+b'y_0+c'z_0+d')}_{0} = 0$$

$\Rightarrow P_0 \in \alpha$

$S \subseteq \mathcal{F}$: Sia $\beta \in S$ Sia P_0 un punto di β t.c. $P_0 \notin r$

Poiché $P_0 \notin r$ esiste uno e un sol piano $\gamma \in \mathcal{F}$ t.c. $P_0 \in \gamma$

$\left.\begin{array}{l} r \subseteq \gamma \text{ e } P_0 \in \gamma \\ r \subseteq \beta \text{ e } P_0 \in \beta \end{array}\right] \Rightarrow \beta = \gamma \in \mathcal{F}$

$\Downarrow$

$\beta \in \mathcal{F}$